

波高周期联合分布四种重现水平对比分析*

陈子燊¹, 施伟勇², 路剑飞³

1. 中山大学地理学院, 广东 广州 510275;

2. 国家海洋局第二海洋研究所工程海洋学重点实验室, 浙江 杭州 310012;

3. 国土资源部广州海洋地质调查局, 广东 广州 510760

摘要: 基于 Gumbel-Hougaard copula、Kendall 和生存 Kendall 函数对比分析波高和周期联合分布的 4 种重现水平。以位于北卡罗来纳州 Duck 的美国陆军工程师团 FRF (Field Research Facility) 实验场观测的波高与周期样本为例, 计算二者联合分布的“或”重现期、“且”重现期、Kendall 重现期和生存 Kendall 重现期及其联合设计值。主要结论如下: 对比设定重现期, 相对于“或”联合重现期, Kendall 重现期可更准确地反映波高周期联合分布的风险率; 相对于“且”联合重现期, 生存 Kendall 重现期可更准确地反映波高周期同时超值情况下的风险率。按目前有关规范设计要求的单变量波高设计值基本达到设计标准, 按两变量“或”重现期和波高周期两变量同频率设计值推算的设计值偏高, 以最大可能概率推算的两变量的 Kendall 重现期和生存 Kendall 重现期设计值可为海岸海洋工程安全与风险管理提供新的选择。

关键词: 风险评估; 设计波浪重现水平; “或”重现期; “且”重现期; Kendall 重现期; 生存 Kendall 重现期

中图分类号: P731.22 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5470(2018)04-0018-06

Comparative analysis on four recurrence levels of joint distribution of wave height and period*

CHEN Zhishen¹, SHI Weiyong², LU Jianfei³

1. School of Geography and Planning, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;

2. Key Laboratory of Engineering Oceanography, Second Institute of Oceanography, Hangzhou 310012, China;

3. Guangzhou Marine Geological Survey, Guangzhou 510760, China

Abstract: In this study, we comparatively analyzed four designed wave recurrence levels of bivariate joint distribution of wave height and wave period by using Archimedean copula function, Kendall distribution function and survival Kendall distribution function. The annual maximum wave height and corresponding wave period of US Army Corps of Civil Engineers Field Research Facility (FRF) at Duck of North Carolina, US as an example, the “OR” primary return periods, “AND” primary return periods, Kendall return periods and survival Kendall return periods of bivariate joint distribution and the most likely designed wave quantiles were computed by using the optimally fitted Gumbel-Hougaard copula. The main conclusions of this study are summarized as follows: Comparing different specific wave return periods, the Kendall return periods can more accurately reflect wave risks relative to “OR” primary return periods, while the survival Kendall return periods can more accurately reflect wave risks when two wave variables are supercritical at the same time with respect to “AND” primary return periods. The univariate wave height or wave period designed value has reached a higher design standard according to the relevant specifications of the current design requirements. The estimated wave design quantiles of the “OR” primary return periods and two variables with the same frequency are obviously higher than those of univariate wave elements. The

收稿日期: 2017-10-30; 修订日期: 2018-2-10。殷波编辑

基金项目: 国家自然科学基金项目(41371498)

作者简介: 陈子燊(1952—), 男, 教授, 从事海岸环境与极端水文气象事件的风险研究。E-mail: eesczs@mail.sysu.edu.cn

*本研究使用的是 Field Research Facility 波浪观测数据, 在此表示衷心感谢!

Received date: 2017-10-30; **Revised date:** 2018-2-10. Editor: YIN Bo

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (41371498)

Corresponding author: CHEN Zishen. E-mail: eesczs@mail.sysu.edu.cn

most-likely design realizations of the Kendall return periods and the survival Kendall return periods can serve as the new selections for safety and risk management of coastal engineering projects.

Key words: risk assessment; designed wave quantiles; “OR” return period; “AND” return period; Kendall return period; Survival Kendall return period

政府间气候变化委员会(IPCC)第5次评估报告预测气候变化会增大极端海况事件发生的概率,对海岸海洋工程设施将造成严重威胁。如何评估变化环境下极端海况事件的风险并提出相应的设计标准是应对海洋工程灾害的重要科学与工程应用问题。海浪过程是由波高与相应周期、风速和延续时间等多个特征要素有机组成的一个整体。已有研究表明,波浪对于海洋工程建筑物的作用力不仅仅取决于波高,周期的影响也是显著的,尤其是波浪的周期与建筑物的自振周期接近产生的共振现象对海工建筑物是一种极大的安全威胁。对此,一些研究人员从不同角度和切入点海浪波高与周期的联合分布进行了研究(Ochi, 1978; 赵耀南, 1982; 马桂芝, 1988; 方钟圣等, 1989; Favre et al, 2004; 陈子燊等, 2012)。然而,目前大多数研究还限于在构建多变量海浪联合重现期和条件概率的分析,如何评估风险与推算联合设计值仍亟待加强研究。

至今,“或”和“且”重现期还是最常用的两种多变量重现期定义方法,但在安全与危险事件的判定上两者都存在着较大局限性(Salvadori et al, 2004)。针对“或”重现期的不足提出了划分安全与危险临界域的新的多变量重现期——Kendall 重现期(Kendall return periods, KRP, 或称二次重现期, secondary return periods)(Salvadori et al, 2011),其相关原理已在海岸工程设计研究中得到初步应用(Corbella et al, 2012; Salvadori et al, 2013a)。随后,进一步针对“且”重现期的不足,提出了基于生存 Kendall 分布函数划分安全与危险临界域新的多变量重现期——生存 Kendall 重现期(survival Kendall return periods, SKRP)(Salvadori et al, 2013b)。为此,有必要应用这些基本原理和方法从设计海浪重现期标准的安全与危险率角度加以进一步分析。

本文拟通过实例对比分析“或”重现期和二次重现期的联合设计水平、“且”重现期和生存 Kendall 重现期的联合设计水平之间的差异,研究有助于深化对极端海浪风险的认识,为海洋工程设计标准和风险管理提供新的参考。

1 理论与方法

1.1 Copula 函数与首次重现期

根据 Sklar 定理,若 $F(\cdot)$ 是一个二维随机变量(X ,

Y)的累积分布函数,其边缘分布函数是连续函数 $u=F_X(x), v=F_Y(y)$, 则有唯一的 Copula 函数 C 使得:

$$F(x,y)=P(X \leq x, Y \leq y)=C(F_X(x), F_Y(y))=C(u,v) \quad (1)$$

式中: $P(X \leq x, Y \leq y)$ 表示随机变量联合概率分布; $C(u,v)$ 表示 copula 分布函数。采用算符“ \vee ”定义“或”极端事件 $E_{XY}^\vee: E_{XY}^\vee = \{X > x \vee Y > y\}$; 以“ \wedge ”定义“且”极端事件 $E_{XY}^\wedge: E_{XY}^\wedge = \{X > x \wedge Y > y\}$, 则极端事件 E_{XY}^\vee 的“或”联合分布重现期 T_{or} 为:

$$T_{or} = \frac{1}{P(X > x \vee Y > y)} = \frac{1}{1 - C(F_X(x), F_Y(y))} \quad (2)$$

极端事件 E_{XY}^\wedge 的“且”联合分布重现期 T_{and} 为:

$$T_{and} = \frac{1}{P(X \geq x \wedge Y \geq y)} = \frac{1}{1 - F_X(x) - F_Y(y) + C(F_X(x), F_Y(y))} \quad (3)$$

“或”重现期和“且”重现期也统称为首次重现期(primary return periods)。

1.2 Kendall 分布函数与 Kendall 重现期

从首次重现期可知,不同的 u, v 组合只要其出现累积概率(记为 t)相同都可产生相同的重现期。为解决由“或”首次重现期定义的安全域/危险域存在的误判问题, Salvadori 等(2004)利用 Nelsen(2004)定义的 Kendall 分布函数划分出亚临界(安全域)、临界(警戒事件)和超临界(危险域)三种情景。通过求累积概率小于或等于某临界概率(记为 t)将多维的极值事件投射为一维分布。基于 Copula 函数累积概率为 t 的 (u, v) 组合值, Kendall 分布函数 K_C 为(Gräler, et al, 2013):

$$K_C(t) = t - \varphi(t) / \varphi'(t), \quad 0 < t \leq 1 \quad (4)$$

式中: $\varphi'(t)$ 为 $\varphi(t)$ 的右导数。由 Kendall 分布函数确定的重现期称 Kendall 重现期 T_K 为:

$$T_K(x, y) = \frac{1}{1 - K_C(t)} \quad (5)$$

1.3 生存 Kendall 函数与生存 Kendall 重现期

对于“且”首次重现期存在的低风险的防御标准识别的危险事件在更高风险的防御标准中可能被视为安全事件的矛盾, Salvadori 等(2004)设极端事件

E_{xy}^{\wedge} 的“and”联合重现期的危险率为:

$$\bar{F}(x, y) = \hat{C}[\bar{F}(x), \bar{F}(y)] \quad (6)$$

式中: \hat{C} 为生存 copula 函数; 单变量生存函数 $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, $\bar{F}(y) = 1 - F(y)$ 。以 $\bar{F}(x, y) = t$ 作为临界标准, 则所有满足 $\bar{F}(x, y) = t$ 的 (x, y) 组合值形成的曲线 L_t 将二维实数空间划分成了三部分: 1) $\bar{\mathfrak{R}}_t^< = \{(x, y) \in R^2, \bar{F}(x, y) < t\}$, 为超临界区, 属于危险域; 2) L_t 为生存临界线, 或危险警戒线; 3) $\bar{\mathfrak{R}}_t^> = \{(x, y) \in R^2, \bar{F}(x, y) > t\}$, 为亚临界区, 属于安全域。显然, $\bar{F}(x, y)$ 越小意味着事件越危险, 若以临界线 L_t 作为危险警戒线, 任何落入 $\bar{\mathfrak{R}}_t^<$ 内的 (x, y) 组合事件都应视为危险事件, 即 $\bar{\mathfrak{R}}_t^<$ 为危险域; 落入 L_t 和 $\bar{\mathfrak{R}}_t^>$ 内的 (x, y) 组合事件则视为安全事件。 (x, y) 落入 $\bar{\mathfrak{R}}_t^<$ 的概率可通过生存 Kendall 函数 $\bar{K}_C(t)$ 计算:

$$P[\bar{F}(x, y) < t] = 1 - \bar{K}_C(t) \quad (7)$$

定义 T_{SK} 为生存 Kendall 重现期(SKRP):

$$T_{SK} = \frac{1}{1 - \bar{K}_C(t)} \quad (8)$$

由此, 相同 SKRP 下的任意 (x, y) 组合都具有相同的安全与危险域, 相比于“且”重现期, SKRP 的定义更严谨。

1.4 联合分布设计值

多变量联合分布同一个重现期可以有不同的分位数组合与之对应, 这些分位数组合无法通过概率分布的反函数直接计算。具有相同重现期 T_p ($C(u, v) = p$) 的分位值组合构成了一个二维点集(等曲线), 设计分位数组合必然存在一个使联合概率密度 $f(u, v)$ 达到最大值的组合 (u_m, v_m) , 即该组合出现的可能性最大。因此, 在设定重现期条件下出现最大可能组合的设计值可作为工程设计与风险管控标准的合理选择。

$$(u_m, v_m) = \arg \max_{(u, v) \in S_p^*} f(u, v) \quad (9)$$

$$f(u, v) = c(u, v) f(u) f(v) \quad (10)$$

式中: c 为二维 Copula 的概率密度函数。

2 实例研究

2.1 基本数据

采用美国陆军工程师团在北卡罗来纳州 Duck 的美国陆军工程师团 FRF (Field Research Facility) 试验场提供的逐日 0 阶谱矩波高 H_{m0} 与相应的谱峰值周期 T_p 数据。FRF 试验场直接面向美国大西洋。采集了投放在水深 17.4m 处的波浪骑士浮标(地理坐标:

36°7'1"N, 75°2'2"W) 1985 年—2016 年期间逐日波要素。按年最大值提取此测波点历年最大 0 阶谱矩波高 H_{m0} 与相应的谱峰值周期 T_p (下面简称为波高 H 与相应周期 T) 作为研究样本, 其中, 2003 年 9 月 13 日极端波况下测量的最大波高为 8.1m, 波周期 15s。

2.2 边缘分布与联合分布

采用水文频率分析中常用的 4 种三参数概率分布: 皮尔逊三型分布(PE3)、广义极值分布(GEV)、广义正态分布(GNO)、广义逻辑斯特分布(GLO)分别拟合波高和周期样本。参数估计使用线性矩(L-矩)方法。经验频率分布使用 Gringorten 公式。拟合结果采用均方根误差(RMSE)、和概率点据相关系数(PPCC)检验其拟合优度。

择优对比结果(见表 1), 波高序列分布 $F_H(h)$ 选用 GLO 分布:

$$F_H(h) = 1 / \{1 + [1 + \alpha(h - \mu) / \beta]^{1/\alpha}\} \quad (11)$$

周期序列分布 $F_T(t)$ 选用 P-III 分布:

$$F_T(t) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t - \mu)^{\alpha-1} \exp[-\beta(t - \mu)] dt; \quad (12)$$

式中: α, β, μ 分别为形态参数、尺度参数和位置参数。参数估计使用线性矩方法。经验频率分布 P_i 使用 Gringorten 公式计算: $P_i = (i - 0.44) / (n + 0.12)$, 式中: i 表示第 i 个样本; n 表示样本总数。拟合结果采用均方根误差(RMSE)和概率点据相关系数(PPCC)检验其拟合优度。根据拟合优度检验结果比较, 年最大 $H_{1/10}$ 和相应平均周期 T 较优边缘分布分别选用 GLO 分布和 P-III 分布(图 1)。

样本序列的波高和周期的 Pearson 相关系数为 0.420, Kendall 相关系数为 0.276。采用相关性指标法计算波高周期联合分布的 Gumbel-Hougaard copula、Frank copula、A-M-H copula 和 Clayton

表 1 波高、周期概率分布参数与拟合优度检验值

Tab. 1 Parameters of the marginal distribution, and values of goodness of fit test

样本	边缘分布	位置参数	尺度参数	形态参数	RMSE	PPCC
H/m	GNO	5.017	0.868	-0.464	0.228	0.984
	GEV	4.756	0.712	-0.082	0.224	0.985
	GLO	5.037	0.492	-0.224	0.223	0.986
	P-III	3.744	2.189	1.473	0.239	0.981
T/s	GNO	12.177	2.506	-0.429	0.479	0.984
	GEV	11.413	2.082	-0.058	0.503	0.983
	GLO	12.230	1.421	-0.208	0.589	0.976
	P-III	8.213	2.538	0.561	0.439	0.987

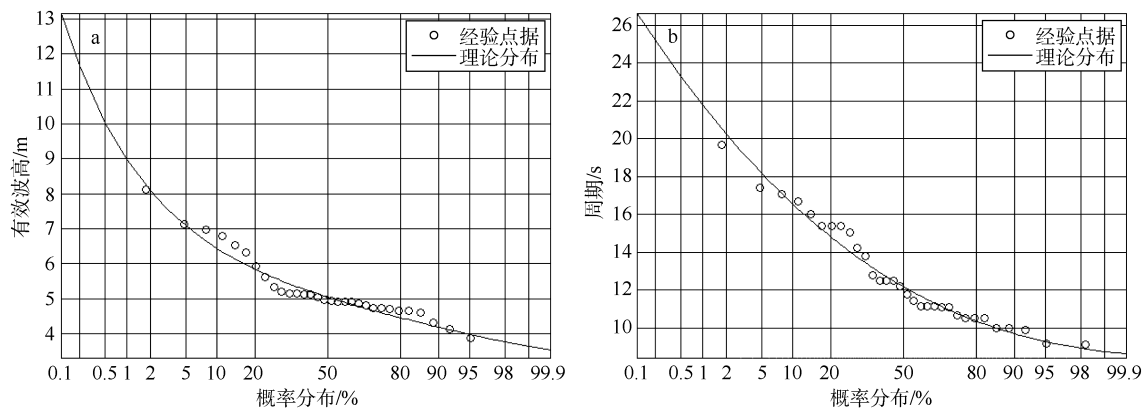


图 1 年最大波高 GLO 分布(a)与周期 P-III型分布(b)
Fig. 1 Diagrams of Generalized Logistic distribution of annual maximum wave heights (a) and Pearson type III distribution of wave periods (b).

copula 的参数 θ 及相应的 AIC (赤池信息量准则)和 RMSE 值见表 2 和图 2。以 RMSE 和 AIC 值最小, 拟合度最高的二维 Gumbel-Hougaard copula 构建的 H-T 联合分布的 Copula 模式如下:

$$C(F_H(h), F_T(t)) = \exp \{ - [(-\ln F_H(h))^{1.382} + (-\ln F_T(t))^{1.382}]^{1/1.382} \}$$

(13)

表 2 波高周期联合分布的参数估计与拟合优度评价结果
Tab. 2 Results of parameter estimation and goodness-of-fit tests for four Copulas

Archimedean Copula	θ	RMSE	AIC
Clayton	0.763	0.423	-53
A-M-H	0.897	0.062	-176
Gumbel-Hougaard	1.382	0.059	-179
Frank	4.000	0.064	-176

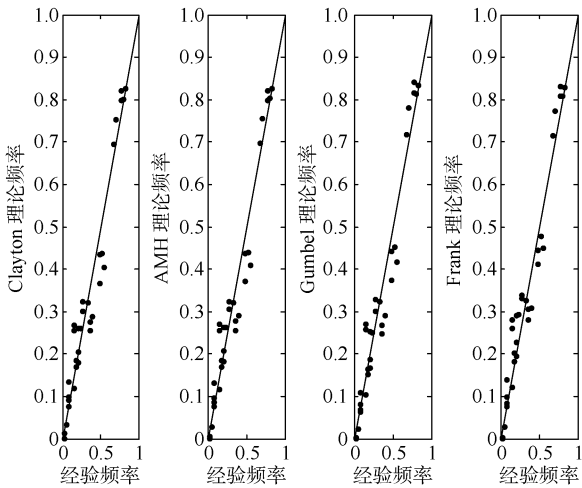


图 2 copula 函数拟合对比图
黑点代表样本; 实线代表理论值
Fig. 2 Comparison of theoretical and empirical joint probabilities with four copulas

2.3 联合分布重现期和危险率

设定重现期标准下波高周期联合分布的 4 种重现期及其超值累积概率(P)的计算结果见表 3。由式(2)、(3)、(5)和 Copula 的非递减性可知, 对于设定的某一重现期, “或”重现期和 kendall 重现期之间的关系为: $T_{or} < T_K$ 。由式(7)和 \hat{C} 的递增性可知, “且”重现期和生存重现期之间的关系为: $T_{and} > T_{SK}$ 。重现期大则危险率小, 反之则危险率大。由表 4 可见, 对于设定的重现期, “或”重现期最小且小于设定的重现期标准, 以波高周期任一要素超标可能致灾的“或”重现期为标准的危险率最大, “且”重现期最大且大于设定的重现期标准, 按波高周期同时超标的“且”重现期设计海岸海洋工程时出现的危险率最小。由上述可知, “或”首次重现期和“且”首次重现期都存在确定危险率不准确的问题, 如按此两种首次重现期标准设计的工程将存在高估或低估风险的问题。从安全角度考虑, 对波高周期任一要素超标致灾的重现期标准宜采用大于“或”重现期的 Kendall 重现期更合理, 对波高周期同时超标致灾的重现期标准宜采用小于“且”重现期的生存 Kendall 重现期更合理。以此实例, 预定重现期为 100a 的工程设计标准, 波高周期任一要素超标致灾

表 3 波高周期联合分布重现期
Tab. 3 Comparison of return periods and hazard rates for the joint distribution of wave heights and periods

重现期/a	P	T_{or}	P	T_{and}	P	T_K	P	T_{SK}	P
100	0.01	60.8	0.0165	282.6	0.0035	215.3	0.0046	106.4	0.0094
50	0.02	30.5	0.0328	139.2	0.0072	105.7	0.0095	57.5	0.0174
20	0.05	12.3	0.0812	53.3	0.0188	40.2	0.0249	22.2	0.0451
10	0.10	6.3	0.1597	24.8	0.0403	18.6	0.0539	10.5	0.0952
5	0.20	3.2	0.3082	10.9	0.0918	8.1	0.1237	4.7	0.2113

宜采用 215.3a 的 Kendall 重现期标准, 波高周期同时超标致灾宜采用 106.4a 的生存 Kendall 重现期标准。观测期间出现最大波高 8.12m (重现期为 51.2a) 和相应

周期 15.4s (重现期为 6.3a) 联合分布的“或”重现期、“且”重现期、Kendall 重现期和生存 Kendall 重现期分别为 6.1a、69.7a、17.9a 和 26.2a, 同样符合理论关系。

表 4 不同重现期下波高与周期的设计值

Tab. 4 Design values of wave height and period at different return periods

重现期/a	边缘分布设计值		“或”重现期设计值		“且”重现期设计值		Kendall 重现期设计值		生存 Kendall 重现期设计值		同频率设计值	
	H/m	T/s	H _{or} /m	T _{or} /s	H _{and} /m	T _{and} /s	H _K /m	T _K /s	H _{SK} /m	T _{SK} /s	H _{tp} /m	T _{tp} /s
100	8.99	21.79	9.64	23.00	7.54	19.52	7.96	20.28	8.43	21.27	9.73	22.86
50	8.09	20.27	8.65	21.50	6.82	18.30	7.24	18.80	7.79	20.15	8.73	21.36
20	7.09	18.19	7.55	19.45	6.14	16.34	6.45	16.83	6.83	18.30	7.61	19.32
10	6.43	16.55	6.83	17.83	5.69	14.85	5.95	15.35	6.25	16.65	6.88	17.70
5	5.84	14.80	6.19	16.09	5.32	13.21	5.51	13.84	5.77	15.19	6.23	15.97

2.4 波高周期设计值

首先按设定重现期(100a、50a、20a、10a、5a)分别推算波高和周期设计值, 再以出现概率最大的原理推算波高和周期联合分布的“或”重现期、“且”重现期、Kendall 重现期和生存 Kendall 重现期设计值(表 4)。结果显示, 对于设定的 5~100a 重现期, 按 Kendall 重现期推算的设计波高和设计周期分别小于“或”重现期设计值和边缘分布设计值, 按 Kendall 重现期推算的波高和周期设计值和相应边缘分布设计值的相对误差分别为 -5.7%~-11.5% 和 -6.5%~-7.5%; 推算的生存 Kendall 重现期设计波高和设计周期分别大于“且”重现期设计值和边缘分布设计值, 生存 Kendall 重现期设计值和相应的边缘分布设计值二者的相对误差分别为 1.2%~6.2% 和 0.6%~2.4%。这一结果也表明, 按目前有关规范设计要求的单变量设计值接近于生存 Kendall 重现期设计值, 已属于较高设计标准。按波高周期联合分布的“或”重现期推算的设计值存在高估问题, 导致投入费用偏大, 按波高周期联合分布“且”重现期推算的设计值存在低估问题, 可能增大海洋工程损毁风险。按波高周期联合分布的 Kendall 重现期或生存 Kendall 重现期推算的设计值可为海洋工程安全与建设投资提供更合理的参考依据。为了比较, 进一步推算波高与周期同频率分布(tp)设计值:

$$u_1 = u_2 = \left[1 - (1/T_{u_1, u_2}) \right]^\alpha;$$

$$H_{tp} = F^{-1}(u_1); T_{tp} = F^{-1}(u_2) \quad (14)$$

式中: u_1 和 u_2 分别代表波高、周期累积分布; $\alpha = 2^{-1/\theta}$; T_{u_1, u_2} 为联合重现期; H_{tp} 表示波高周期同频率联合分布下的波高设计值; T_{tp} 表示波高周期同频率联合分布下的周期设计值; $F_{u_i}^{-1}(u_i)$ 为边缘分布函数的反函数。从计算结果(表 4)可见, 波高周期联合分布的同频率设计值十分接近于按联合概率密度最大值推算的“或”重现期设计值。换言之, 使用波高周期联合分布同频率分布设计值作为海洋工程安全标准偏高。

3 结论

对比分析了 FRF 试验场观测的波高周期二维联合分布及其 4 种重现水平, 获得以下结论: 对于预设的重现期, 相对于“或”联合重现期, Kendall 重现期可更准确地识别单个超临界区域的风险率; 相对于“且”联合重现期, 生存 Kendall 重现期可更好地描述波高和周期同时超阈值情况下的风险率。按目前有关规范设计要求的单变量波高或周期设计值已可达到安全标准, 按波高周期“或”重现期和同频率推算的设计值偏高, 工程费用偏大, 采用 Kendall 重现期和生存 Kendall 重现期推算的波浪设计值可为海洋工程风险管理与设计提供新的选择与参考。

参考文献 References

- 陈子荣, 曹深西, 2012. 基于 Copula 函数的波高与周期长期联合分布[J]. 海洋通报, 31(6): 630-635. CHEN ZISHEN, CAO SHENXI, 2012. Long-term joint distribution of wave height and period based on Copula functions[J]. Marine Science Bulletin, 31(6): 630-635 (in Chinese with English abstract).
- 方钟圣, 戴顺孙, 金承仪, 1989. 海洋特征波高和周期的长期联

- 合分布及其应用[J]. 海洋学报, 11(5): 535-543 (in Chinese).
- 马桂芝, 1988. 重现期设计波高相对应的波浪周期推算方法的讨论[J]. 海洋湖沼通报, (4): 87-90 (in Chinese).
- 潘锦娥, 1989. 显著(或有效)波高与平均周期的长期联合分布探讨[J]. 海洋通报, 8(3): 1-10 (in Chinese).
- 赵耀南, 1982. 等重现期的最不利设计波浪[J]. 海洋学报, 4(5): 754-762 (in Chinese).

- CORBELLA S, STRETCH D D, 2012. Multivariate return periods of sea storms for coastal erosion risk assessment[J]. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 12(8): 2699–2708.
- FAVRE A C, ADLOUNI S E, PERREAULT L, THIÉMONGE N, et al, 2004. Multivariate hydrological frequency analysis using Copulas[J]. *Water Resources Research*, 40(1): W01101.
- GRÄLER B, VAN DEN BERG M J, VANDENBERGHE S, et al, 2013. Multivariate return periods in hydrology: A critical and practical review focusing on synthetic design hydrograph estimation[J]. *Hydrology and Earth System Sciences*, 17(4): 1281–1296.
- NELSEN R B, 1999. *An Introduction to Copulas*[M]. New York: Springer.
- OCHI M K, 1978. Wave statistics for the design of ships and ocean structures[J]. *SNAME Transactions*, 86: 47–76.
- SALVADORI G, DE MICHELE C, 2004. Frequency analysis via copulas: Theoretical aspects and applications to hydrological events[J]. *Water Resources Research*, 40(12): W12511, doi: 10.1029/2004WR003133.
- SALVADORI G, DE MICHELE D, DURANTE F, 2011. On the return period and design in a multivariate framework[J]. *Hydrology and Earth System Sciences*, 15(11): 3293–3305.
- SALVADORI G, DURANTE F, DE MICHELE C, 2013b. Multivariate return period calculation via survival functions[J]. *Water Resources Research*, 49(4): 2308–2311.
- SALVADORI G, TOMASICCHIO G R, D’ALESSANDRO F, 2013a. Multivariate approach to design coastal and off-shore structures[J]. *Journal of Coastal Research*, 65: 386–391.